

UDK 528.14

## GPS VIRTUALIOSIOS REFERENCINĖS STOTIES REGRESINIS PROGNOZINIS MODELIS, TAIKANT KOLOKACIJOS METODĄ

Jonas Skeivalas

*Geodezijos ir kadastro katedra, Vilniaus Gedimino technikos universitetas,  
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lietuva  
El. paštas Jonas.Skeivalas@ap.vtu.lt*

*[teikta 2006 11 07, priimta 2006 12 21]*

**Santrauka.** Straipsnyje pateikiamas GPS metodu nustatytų taškų koordinacių, nešlio fazių skirtumų bei pseudoatstumų pataisų skaičiavimo principas, sudarant GPS virtualiųjų stočių regresinius modelius, taikant kolokacijos metodą. Regresinių lygčių parametru reikšmės, taikant kolokacijos metodą, apskaičiuojamos mažiausiųjų kvadratų metodu remiantis žinomomis tiksliais referencinių stočių koordinatėmis bei išmatuotomis atitinkamų GPS dydžių reikšmėmis. GPS vartotojo imtuvo koordinacių bei nešlio fazių skirtumų ir pseudoatstumų pataisų nustatomos pagal sudarytus prognozinis modelius. Prognozinis modelių tikslumas įvertinamas kovariacijų matricomis.

**Reikšminiai žodžiai:** GPS referencinės stotys, regresija, kovariacija, prognozė.

### 1. Įvadas

Tam tikro skaičiaus GPS referencinių stočių matavimų duomenys apibendrinami ir sisteminami virtualiosiose referencinėse stotyse, taikant atitinkamą modelį [1–11]. Taip patikimiau ir tiksliau nustatoma GPS signalų vartotojų padėtis, priimant jau apdorotus ir tam tikro modelio pavidalu iš virtualiųjų stočių transliuojamus signalus.

Straipsnyje siūlomas regresinis virtualiųjų GPS stočių vartotojo imtuvo pataisų prognozavimo modelis, jo parametru reikšmės nustatant mažiausiųjų kvadratų bei kolokacijos metodais. Tam panaudojamos GPS referencinių stočių koordinacių pataisos ir nešlio fazių skirtumų bei pseudoatstumų pataisos. Analizuojamas pataisų modelių tikslumas.

### 2. GPS virtualiosios referencinės stoties regresinio modelio teorinis principas

Troposferos ir jonosferos įtakai GPS matavimų rezultatams efektyviau eliminuoti yra sudaromos GPS virtualiosios stotys. Vartotojo padėties koordinacių pataisos arba pseudoatstumų bei nešlio fazių pataisos priklauso nuo atstumo tarp vartotojo ir virtualiosios stoties bei krypties į šią stotį [1, 2].

Kadangi GPS referencinės stotys įrengiamos taškuose, kurių koordinatės tiksliai žinomos (su keleto milimetrų ar centimetrų klaidomis), tai kiekviena GPS referencinė stotis pagal priimtus DŽP (dirbtinių Žemės palydovų) kodinius ir nešlio signalus gali apskaičiuoti išmatuotų koordinacių, pseudoatstumų bei nešlio fazių skirtumų pataisas. Taigi galime parašyti:

$$\delta T_i = \tilde{T}_i - T_i, \quad (1)$$

$$\delta \Phi_i^k(t) = \tilde{\Phi}_i^k(t) - \Phi_i^k(t), \quad (2)$$

$$\delta R_i^k(t) = \tilde{R}_i^k(t) - R_i^k(t), \quad (3)$$

čia  $\delta T_i \rightarrow (\delta X_i, \delta Y_i, \delta Z_i)^T$  –  $i$ -osios referencinės stoties koordinacių pataisų vektorius;  $T_i \rightarrow (X_i, Y_i, Z_i)^T$  – išmatuotų apytikrių koordinacių vektorius;  $\tilde{T}_i \rightarrow (\tilde{X}_i, \tilde{Y}_i, \tilde{Z}_i)^T$  – tikslų koordinacių vektorius;  $\delta \Phi_i^k(t)$  –  $i$ -osios referencinės stoties nešlio fazių pataisa ciklais laiko momentu  $t$ , kai priiminėjami  $k$ -ojo palydovo signalai;  $\delta R_i^k(t)$  –  $i$ -osios referencinės stoties pseudoatstumų pataisa laiko momentu  $t$ , kai priimami  $k$ -ojo palydovo signalai;  $\Phi_i^k(t)$ ,  $\tilde{\Phi}_i^k(t)$ ,  $R_i^k(t)$ ,  $\tilde{R}_i^k(t)$  – išmatavus gautos ir tikslios atitinkamų dydžių reikšmės.

GPS vartotojas tiksliai savo  $A$  taško koordinatas apskaičiuoja pagal išmatuotus atitinkamus dydžius, t. y. koordinatas, nešlio fazių skirtumus arba pseudoatstumus ir taikydamas GPS referencinių stočių transliuojamas šių dydžių pataisas GPS virtualiosios stoties duomenų pavidalu.

GPS virtualiosios stoties regresiniai modeliai sudaromi tiesinių parametrinių lygčių sistemos pavidalu, taikant kolokacijos metodą:

$$\left. \begin{aligned} \delta \tilde{F} &= A_u \tau_u + A_e \tau_e \\ \tilde{H}_e &= H_e + \tau_e \end{aligned} \right\}, \quad (4)$$

čia  $\delta\tilde{F} \rightarrow \delta\tilde{T}, \delta\tilde{\Phi}(t), \delta\tilde{R}(t)$  – atitinkamai referencinių stočių išlygintųjų koordinačių pataisų arba nešlio fazių skirtumų pataisų ar pseudoatstumų pataisų vektoriai,  $A_u$  – parametrinių lygčių koordinačių koeficientų matrica,  $A_e$  – parametrinių lygčių elipsoidinių koeficientų matrica,  $\tau = (\tau_u, \tau_e)^T = (t_1, t_2 \dots t_k)^T$  – determinuotųjų parametrų reikšmių vektorius;  $H_e, \tilde{H}_e$  – atitinkamai referencinių stočių išmatuotų ir išlygintųjų elipsoidinių aukščių vektoriai;  $k = k_u + k_e$  – bendras  $\tau_u$ , ir  $\tau_e$  parametrų skaičius,  $k_u$  – koordinačių parametrų  $\tau_u$  skaičius,  $k_e$  – elipsoidinių parametrų  $\tau_e$  skaičius.

Taigi sudaromos trys parametrinių lygčių sistemos: pagal referencinių stočių koordinačių pataisus, nešlio fazių skirtumų pataisus bei pseudoatstumų pataisus.

Parametrinių lygčių sistemą (4) skaičiavimų apimčiai sumažinti parašome pataisų lygčių sistemos pavidalu:

$$\left. \begin{aligned} V_u &= A_u \tau_x + A_e \tau_e - \delta F \\ V_e &= \tau_e \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

čia  $V_u = \delta\tilde{F} - \delta F$ ,  $V_e = \tilde{H}_e - H_e$  – atitinkami pataisų vektoriai,  $\delta F \rightarrow \delta T, \delta\Phi(t), \delta R(t)$  – referencinėse stotyse nustatytų atitinkamų dydžių pataisų vektoriai,  $n = n_u + r$  – bendras pataisų lygčių skaičius,  $n_u$  – koordinačių lygčių skaičius,  $r$  – elipsoidinių lygčių skaičius.

Sistema (5) blokinių matricių pavidalu:

$$V = \begin{pmatrix} A_u & A_e \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_u \\ \tau_e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \delta F \\ 0 \end{pmatrix} = A\tau - \delta F_0, \quad (6)$$

čia  $V = (V_u V_e)^T$ ,  $E$  – vienetinė matrica,  $A = \begin{pmatrix} A_u & A_e \\ 0 & E \end{pmatrix}$ ,

$$\delta F_0 = \begin{pmatrix} \delta F \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Parametrinių lygčių koeficientų matricai  $A_u$  sudaryti taikomos redukuotosios apytikrės referencinių stočių koordinačės. Matricai  $A_e$  sudaryti taikomi redukuotieji referencinių stočių elipsoidiniai aukščiai. Taikant koordinačių pataisų arba nešlio fazių pataisų ar pseudoatstumų pataisų modelius matricių  $A_u$  išraiškos yra skirtingos.

Pataisų lygčių sistema (6) sprendžiama mažiausiųjų kvadratų metodu, ir gaunamas parametrų reikšmių vektorius:

$$\tau = N^{-1} A^T P \delta F, \quad (7)$$

čia  $N = A^T P A$  – normalinių lygčių koeficientų matrica,  $P = (P_u P_e)_{diag}$  – referencinių stočių atitinkamų dydžių pataisų  $\delta F_i$  ir elipsoidinių aukščių  $H_{e_i}$  svorių matrica.

Normalinių lygčių koeficientų matricą  $N$  galima užrašyti blokiniu pavidalu:

$$N = \begin{pmatrix} A_u & A_e \\ 0 & E \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} P_u & \\ & P_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_u & A_e \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_u^T P_u A_u & A_u^T P_u A_e \\ A_e^T P_u A_u & A_e^T P_u A_e + P_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Apskaičiuotų parametrų reikšmių vektoriaus  $\tau$  tikslumas įvertinamas jų kovariacijų matrica  $K_\tau$ :

$$K_\tau = \sigma_0^2 N^{-1} = \sigma_0^2 \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

čia  $\sigma_0$  – matavimo rezultato, kurio svoris lygus vienetui, standartinis nuokrypis.

Standartinio nuokrypio įvertis  $m_0$  nustatomas iš formulės

$$\sigma_0^2 \approx m_0^2 \approx \frac{1}{n-k} V^T P V. \quad (10)$$

Parametrų vektoriaus  $\tau$  blokinių dalių  $\tau_u$  ir  $\tau_e$  kovariacijų matricos  $K_{\tau_u}$  ir  $K_{\tau_e}$  gaunamos iš išraiškos (9):

$$K_{\tau_u} = \sigma_0^2 Q_{11}, \quad (11)$$

$$K_{\tau_e} = \sigma_0^2 Q_{22}. \quad (12)$$

Blokinių vektorių  $\tau_u$  ir  $\tau_e$  tarpusavio kovariacijų matricos yra lygios:

$$K \begin{pmatrix} \tau_u \\ \tau_e \end{pmatrix} = \sigma_0^2 Q_{12}. \quad (13)$$

Išlygintųjų parametrų vektoriaus  $\delta\tilde{F} = (A_u A_e) \tau$  (formulės (4) pirmoji lygtis) kovariacijų matrica  $K_{\delta\tilde{F}}$  yra lygi

$$K_{\delta\tilde{F}} = (A_u A_e) K_\tau (A_u A_e)^T = \sigma_0^2 (A_u Q_{11} A_u^T + A_e Q_{21} A_u^T + A_u Q_{12} A_e^T + A_e Q_{22} A_e^T). \quad (14)$$

Įvertinsime kolokacijos metodo įtaką nustatomų regresijos modelio parametrų tikslumui. Tam taikysime blokinių atvirkštinės matricos  $N^{-1}$  pavidalą pagal K. R. Koch [4]:

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} N_{11}^{-1} + F H^{-1} F^T & -F H^{-1} \\ -H^{-1} F^T & H^{-1} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

čia  $F = N_{11}^{-1} N_{12}$ ,  $H = N_{22} - N_{21} N_{11}^{-1} N_{12}$ .

Formulės (9) ir (15) rodo, kad matricos  $Q_{11}$  diagonalieji nariai yra didesni už matricos  $N_{11}^{-1}$  diagonaluosius narius, t. y.

$$(Q_{11})_{ii} = (N_{11}^{-1} + FH^{-1}F^T)_{ii} > (N_{11}^{-1})_{ii}, \quad (16)$$

nes kovariacijų matricos diagonalieji nariai visada yra teigiamieji.

Apskaičiuotųjų parametrų vektoriaus  $\tau = (\tau_u \tau_e)^T$  kovariacijų matricos  $K_\tau$  blokinė dalis  $K_{\tau_u} = \sigma_0^2 Q_{11}$  apibūdina parametrų vektoriaus  $\tau_u$  tikslumą, gaunamą netaikant kolokacijos metodo, t. y.  $K'_{\tau_u} = \sigma_0^2 N_{11}^{-1}$ . Formulė (16) rodo, kad parametrų vektoriaus  $\tau_u$  tikslumas yra mažesnis, kai taikomas kolokacijos metodas, nes kovariacijų matricos  $K_{\tau_u}$  diagonalieji nariai (dispersijos) yra didesni už kovariacijų matricos  $K'_{\tau_u}$  diagonaluosius narius.

Regresinių lygčių parametrų vektorius  $\tau_u$ , taikant kolokacijos metodą, tampa mažiau tikslus, palyginti su atveju, kai šis metodas netaikomas, nes tam tikra dalis matavimo duomenų panaudojama papildomų parametrų vektoriumi  $\tau_e$  apskaičiuoti. Nepaisant šių tikslumo prasme tam tikrų nuostolių, taikant papildomų parametrų vektorius  $\tau_e$  galima patikimiau konstruoti prognozinį GPS vartotojo imtuvo koordinatinių tikslinimo modelį.

GPS virtualiosios referencinės stoties regresinio modelio parametrų reikšmių vektorius  $\tau$  naudojamas sudarant GPS vartotojų imtuvais nustatomų taškų koordinatinių pataisų prognozinį modelį. Šio modelio išraiška:

$$\delta F_s = A_s \tau_u, \quad (17)$$

čia  $\delta F_s$  – nustatomų taškų koordinatinių pataisų arba nešlio fazių skirtumų pataisų ar pseudoatstumų pataisų vektorius,  $A_s$  – koeficientų matrica, sudaroma pagal vartotojų imtuvais nustatytas apriorines redukuotąsias taškų koordinates  $(X'_s, Y'_s, Z'_s)$ .

Apskaičiuotojo vektoriaus  $\delta F_s$  kovariacijų matrica  $K_{\delta F_s}$  yra lygi

$$K_{\delta F_s} = A_s K_{\tau_u} A_s^T = \sigma_0^2 A_s Q_{11} A_s^T. \quad (18)$$

GPS vartotojų imtuvų tikslų matuojamųjų dydžių vektorius gaunamas taip:

$$\tilde{T}_s = T_s + \delta F_s.$$

### 3. GPS virtualiosios referencinės stoties modelis taikant koordinatinių korektūrą

Šiam modeliui sudaryti taikomos tiksliosios referencinių stočių koordinatės bei jų apriorinės koordinatės, nustatytos atitinkamą epochą. Pagal referencinių stočių duomenis, taikant kolokacijos metodą, sudaroma parametrinių pataisų lygčių sistema (5)

$$\left. \begin{aligned} V_u &= A_u \tau_u + A_e \tau_e - \delta T \\ V_e &= \tau_e \end{aligned} \right\}, \quad (19)$$

čia  $V_u = \delta \tilde{T} - \delta T$ ,  $V_e = \tilde{H}_e - H_e$ ,  $\delta T_i = \tilde{T}_i - T_i = (\tilde{X}_i - X_i, \tilde{Y}_i - Y_i, \tilde{Z}_i - Z_i)^T$ .

Taikant sąlygą  $k > n$  sudaroma atitinkamos eilės regresinė lygtis. Panaudoję antrosios eilės regresinę lygtį, parametrų  $\tau_i$  skaičių turėtume lygų  $k = 6 + k_e$ , čia  $k_e = r -$  referencinių stočių skaičius.

Matricos  $A_u$  ir  $A_e$  turi blokinį pavidalą:

$$A_u = \begin{pmatrix} A_{u_1} \\ \vdots \\ A_{u_r} \end{pmatrix}, \quad A_e = (A_{e_1} \dots A_{e_r})_{\text{diag}}.$$

Blokinės dalys  $A_{u_i}$  ir  $A_{e_i}$  priklauso  $i$ -ajai referencinei stotiai.

Blokinės dalys  $A_{u_i}$  sudaromos panaudojus referencinių stočių redukuotąsias koordinates  $(X'_i, Y'_i, Z'_i)$ :

$$A_{u_i} = \begin{pmatrix} A_{x_i} \\ A_{y_i} \\ A_{z_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'_i & Y'_i & Z'_i & X_i'^2 & 0 & 0 \\ X'_i & Y'_i & Z'_i & 0 & Y_i'^2 & 0 \\ X'_i & Y'_i & Z'_i & 0 & 0 & Z_i'^2 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Redukuotosios referencinių stočių koordinatės gaunamos iš lygbių:

$$\begin{aligned} X'_i &= (X_i - X_0) \cdot 10^{-5}, \\ Y'_i &= (Y_i - Y_0) \cdot 10^{-5}, \\ Z'_i &= (Z_i - Z_0) \cdot 10^{-5}, \end{aligned}$$

čia  $X_0, Y_0, Z_0$  – referencinių stočių tinklo mažiausios suapvalintos koordinatinių reikšmės.

Matricos  $A_e$  blokinė dalis  $A_{e_i}$  yra lygi

$$A_{e_i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & H'_{e_i} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & H'_{e_i} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & H'_{e_i} & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

čia  $H'_{e_i} = H_{e_i} \cdot 10^{-2}$  – redukuotasis elipsoidinis aukštis.

Toliau parametrų vektorius  $\tau = (\tau_u \tau_e)^T$  reikšmė nustatoma pagal formulę (7), o jos kovariacijų matrica  $K_\tau$  pagal formulę (9). GPS vartotojų imtuvų koordinatinių pataisų prognoziniam modeliui formuoti taikoma formulė (15).

#### 4. GPS virtualiosios referencinės stoties modelis taikant nešlio fazių skirtumų bei pseudoatstumų pataisais

Regresinio modelio nešlio fazių skirtumų ir pseudoatstumų parametrinių pataisų lygčių sistemos užrašomos taikant išraišką (5):

$$\left. \begin{aligned} V_\phi &= A_\phi \tau_\phi + A_e \tau_e - \delta\Phi \\ V_e &= \tau_e \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

ir

$$\left. \begin{aligned} V_R &= A_R \tau_R + A_e \tau_e - \delta R \\ V_e &= \tau_e \end{aligned} \right\}, \quad (22)$$

čia  $\delta\Phi, \delta R$  – atitinkamai nešlio fazių skirtumų ir pseudoatstumų pataisų vektoriai.

Matricos  $A_\phi$  ir  $A_R$  turi blokinį pavidalą:

$A_\phi = A_R = (A_{\phi_1} A_{\phi_2} \dots A_{\phi_r})^T$ . Blokinės dalys  $A_{\phi_i}$  yra vienodos nustatant nešlio fazių skirtumų ar pseudoatstumų pataisais, t. y.  $A_{\phi_i} = A_{R_i}$ . Blokinės dalys  $A_{\phi_i}$  ir  $A_{R_i}$  taikant antrosios eilės regresinę išraišką:

$$A_{\phi_i} = A_{R_i} = (X_i' Y_i' Z_i' X_i^2 Y_i^2 Z_i^2).$$

Referencinių stočių redukuotosios koordinatės  $(X_i' Y_i' Z_i')$  skaičiuojamos pagal anksčiau aprašytas formules. Matricos  $A_{e_i}$  turi anksčiau aprašytas išraiškas.

Parametrų vektorius  $\tau = (\tau_\phi \tau_e)^T$ , taikant nešlio fazių skirtumus, bei vektorius  $\tau' = (\tau_R \tau_e)^T$ , taikant pseudoatstumus, reikšmės skaičiuojamos pagal formulę (7). Vektorių  $\tau$  ir  $\tau'$  tikslumas įvertinamas jų kovariacijų matricomis  $K_\tau$  ir  $K_{\tau'}$ , kurios skaičiuojamos pagal formulę (9). GPS vartotojų imtuvų nešlio fazių skirtumų bei pseudoatstumų pataisų prognoziniai modeliai sudaromi taikant formulę (15).

#### 5. Išvados

1. GPS virtualiosios referencinės stoties regresinių lygčių parametrų reikšmėms nustatyti pasiūlyta taikyti kolokacijos metodą. Šiuo atveju padaugėja skaičiavimuose naudojamų duomenų bei parametrų, palyginti nei paprasto regresinio modelio atveju, išliekant tos pačios eilės regresinėms lygtims.

2. Regresinio modelio parametrų vektorius  $\tau_u$ , taikant kolokacijos metodą, yra mažiau tikslus nei tuo atveju, kai šis metodas netaikomas. Taip atsitinka dėl papildomų parametrų vektorius  $\tau_e$  įvedimo skaičiavimų procedūrose. Tačiau taikant kolokacijos metodą galima patikimiau formuoti prognozinį GPS vartotojo imtuvo koordinatinių tikslinimo modelį.

#### Literatūra

1. WANNINGER, L. Virtuelle GPS-Referenzstationen für grossräumige kinematische Anwendungen. *Zeitschrift für Vermessungswesen*, No 3. Stuttgart: Verlag K. Witwer, 2003, S. 196–202.
2. HANKEMEIER, P. Der Satellitenpositionierungsdienst SAPOS in Deutschland. In *Multifunktionale GNSS-Referenzstationsysteme für Europa*. Workshop von 4–5. März 2002 in der Europäischen Akademie für städtische Umwelt. Berlin, 2002, S. 16–23.
3. TEUNISSEN, P. J. G. The parameter distributions of the integer GPS model. *Journal of Geodesy*, No 1 (76), 2002, p. 41–48.
4. KOCH, K. R. *Einführung in die Bayes-Statistik*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2000. 225 S.
5. SKEIVALAS, J. Accuracy determination of the coordinates augmentations of GPS vectors by measuring double phase shifts of the carrier. *Geodesy and Cartography (Geodezija ir kartografija)*, Vol XXIX, No 4, 2003, p. 115–118 (in Lithuanian).
6. BAUER, M. *Vermessung und Ortung mit Satelliten*. Heidelberg: Wichmann, 1994. 274 S.
7. HOFMANN-WELLENHOF, B.; LICHTENEGGER, H. and COLLINS, J. Global Positioning System. In *Theory and Practice*. Wien, New York: Springer-Verlag, 1992. 326 p.
8. LEICK, A. *GPS Satellite Surveying*. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore: John Wiley and Sons, 1995. 352 p.
9. MARKUZE, J. I. *Algorithms for geodetic networks adjustment using computers* (Алгоритмы для уравнивания геодезических сетей на ЭВМ). Moscow: Nedra, 1989. 248 p. (in Russian).
10. GAO, Y.; and LIU, Z. Z. Precise Ionosphere Modeling Using Regional GPS Network Data. *Journal of Global Positioning Systems*, Vol 1, No 1, 2002, p. 18–24.
11. SKEIVALAS, J. Regression model of virtual GPS reference. *Geodesy and Cartography (Geodezija ir kartografija)*, Vol XXXII, No 4, 2006, p. 96–99 (in Lithuanian).

**Jonas SKEIVALAS**, Prof., Doctor Habil. Vilnius Gediminas Technical University. Dept of Geodesy and Cadastre, Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lithuania. Ph +370 5 2744 703, Fax +370 5 2744 705, e-mail: jonas.skeivalas@ap.vtu.lt.

Author of two monographs and more than 130 scientific papers. Participated in many intern conferences and research visits to the Finish Geodetic Institute.

Research interests: processing of measurements with respect to tolerances, adjustment of geodetic networks.