

UDK 528.389

## VERTIKALIŲ IR HORIZONTALIŲ ŽEMĖS PLUTOS JUDESIŲ SĄSAJOS

Algimantas Zakarevičius

*Geodezijos ir kadastro katedra, Vilniaus Gedimino technikos universitetas,  
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius-40, Lietuva,  
el. paštas: Algimantas.Zakarevicius@ap.vtu.lt*

*Įteikta 2006 02 20, priimta 2006 03 20*

**Santrauka.** Horizontalieji ir vertikalieji Žemės plutos judesiai tarpusavyje susiję, nes jie yra tų pačių Žemės pluta veikiančių jėgų pasekmė. Taip pat yra abipusis ryšys tarp Žemės plutos deformacijų ir tektoninių įtampų sklaidos. Todėl pagal išmatuotas vertikaliųjų Žemės plutos deformacijų reikšmes galima įvertinti horizontaliųjų deformacijų rodiklius, nustatyti jų kaitos dėsningumus ir atvirkščiai. Straipsnyje pateikta nustatytoji analitinė sąsaja tarp horizontaliųjų bei vertikaliųjų Žemės plutos deformacijų. Sąsajoms nustatyti taikyta vektorinė bei tenzorinė analizė. Pateiktas algoritmas horizontaliųjų Žemės plutos deformacijų rodikliams įvertinti pagal vertikaliųjų judesių matavimo rezultatus. Deformacijų rodikliai įvertinti baigtinių elementų metodu. Pateiktas parengto algoritmo taikymo skaitinis pavyzdys.

**Prasminiai žodžiai:** Žemės plutos judesiai, tektoninės įtampos, deformacijų tenzorius, svarbiausios deformacijos.

### 1. Įvadas

Žemės pluta, veikiama giluminių tektoninių jėgų, juda horizontaliaja ir vertikaliaja kryptimis. Kadangi horizontalieji ir vertikalieji Žemės plutos judesiai atsiranda dėl tų pačių priežasčių, jie tarpusavyje susiję. Giluminių jėgų sukelti horizontalieji bei vertikalieji Žemės plutos judesiai turi įtakos geodinaminių įtampų persiskirstymui Žemės plutoje, t. y. atsiranda priežasties ir pasekmės grįžtamieji ryšiai [1–4]. Todėl, tiriant geodeziniais metodais dabartinius Žemės plutos judesius, apie dabartinių Žemės plutos geodinaminių įtampų kryptingumą, jų sklaidą galima spręsti ne tik pagal horizontaliųjų, bet ir vertikaliųjų Žemės plutos judesių matavimus. Svarbiausios geodinaminių įtampų laukų kryptys sutampa su svarbiausiomis deformacijų kryptimis.

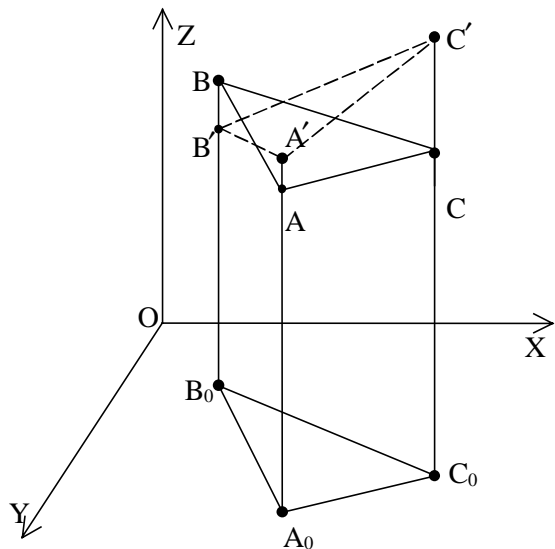
Šio darbo tikslas – nustatyti analitinį ryšį tarp vertikaliųjų ir horizontaliųjų Žemės plutos judesių bei parengti metodiką, kaip apskaičiuoti svarbiausių Žemės plutos horizontaliųjų deformacijų kryptis pagal vertikaliųjų Žemės plutos deformacijų matavimų duomenis.

### 2. Vertikaliųjų Žemės plutos judesių ir atstumų tarp taškų pokyčių sąsajos

Sąsajoms atstumų tarp taškų Žemės paviršiuje pokyčių ir vertikaliųjų judesių įvertinti taikysime

baigtinių elementų metodą [5, 6]. Kaip baigtinius elementus pasirinksime trikampus. Erdvinei baigtinio elemento padėčiai nustatyti taikysime erdvinę stačiakampę topocentrių horizontaliųjų koordinacių sistemą, kurioje  $X$  ašies kryptis sutampa su šiaurine per koordinacių pradžios tašką einančio dienovidinio projekcijos kryptimi. Tuomet vertikaliųjų Žemės paviršiaus taškų poslinkių kryptis baigtinio elemento plote galima sutapatinti su  $Z$  ašies kryptimi, horizontaliąsias deformacijas nagrinėti  $XOY$  plokštumoje, o atkarpų kryptis plokštumoje apibūdinti direkciniais kampais. Nagrinėdami santykinės deformacijas, taikysime Legranžo deformacijų sampratą ir modelį [7]. Horizontaliųjų ir vertikaliųjų Žemės plutos judesių sąsajoms nustatyti taikysime vektorinį skaičiavimą.

Tarkime, kad turime geodeziniais ženklais vietovėje įtvirtintą tam tikro dydžio trikampį  $ABC$ , kuris erdvinėje stačiakampėje koordinacių sistemoje schemiškai parodytas paveiksle. Trikampio viršūnių padėtis laiko momentu  $T_0$  apibūdinama koordinatėmis:  $A(X_A, Y_A, Z_A)$ ,  $B(X_B, Y_B, Z_B)$ ,  $C(X_C, Y_C, Z_C)$ . Laikome, kad per laiko tarpą  $\Delta T = T - T_0$  trikampio viršūnių koordinatės  $X$ ,  $Y$  nepakito, o koordinatė  $Z$  dėl vertikaliųjų Žemės plutos judesių pakito reikšmėmis  $\Delta Z_A$ ,  $\Delta Z_B$ ,  $\Delta Z_C$ . Tuomet laiko momentu  $T$  trikampio viršūnių koordinatės bus  $A(X_A, Y_A, Z_A + \Delta Z_A)$ ,  $B(X_B, Y_B, Z_B + \Delta Z_B)$ ,  $C(X_C, Y_C, Z_C + \Delta Z_C)$ .



Trikampio deformacija: ABC – pradinė trikampio forma, A'B'C' – deformuotas trikampis, A<sub>0</sub>B<sub>0</sub>C<sub>0</sub> – trikampių projekcija XOY plokštumoje

Deformation of triangle: ABC – initial shape of triangle, A'B'C' – deformed triangle, A<sub>0</sub>B<sub>0</sub>C<sub>0</sub> – projection of triangles on the XOY plane

Laiko momentu  $T_0$  vektoriaus  $\overrightarrow{AB}$  modulis bus

$$|\overrightarrow{AB}| = d_{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2}, \quad (1)$$

o laiko momentu  $T$  vektoriaus  $\overrightarrow{AB}$  padėtis pasikeis į  $\overrightarrow{A'B'}$ , ir jo modulis bus lygus

$$|\overrightarrow{A'B'}| = d_{A'B'} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + [(Z_B + \Delta Z_B) - (Z_A + \Delta Z_A)]^2}. \quad (2)$$

Pakėlę (1) ir (2) lygybes kvadratu bei iš antrosios atėmę pirmąją, gauname

$$d_{A'B'}^2 - d_{AB}^2 = (\Delta Z_B - \Delta Z_A)^2 + 2(Z_B - Z_A)(\Delta Z_B - \Delta Z_A). \quad (3)$$

Galima parašyti, kad

$$d_{A'B'}^2 - d_{AB}^2 = (d_{A'B'} - d_{AB})(d_{A'B'} + d_{AB}). \quad (4)$$

Taikant Legranžo deformacijų modelį [6], iš (4) lygybės galima parašyti, kad

$$d_{A'B'}^2 - d_{AB}^2 = \Delta d_{AB} 2d_{AB}, \quad (5)$$

čia  $\Delta d_{AB} = d_{A'B'} - d_{AB}$ .

Tuomet iš (3) ir (5) lygybių gauname, kad santykinis trikampio kraštinės AB pailgėjimas per laiko tarpą  $\Delta T = T - T_0$  dėl vertikalųjų Žemės plutos judesių yra

$$\varepsilon_{AB} = \frac{(\Delta Z_B - \Delta Z_A)^2}{2d_{AB}^2} + \frac{(Z_B - Z_A)(\Delta Z_B - \Delta Z_A)}{d_{AB}^2}. \quad (6)$$

Analogiškai gauname

$$\varepsilon_{AC} = \frac{(\Delta Z_C - \Delta Z_A)^2}{2d_{AC}^2} + \frac{(Z_C - Z_A)(\Delta Z_C - \Delta Z_A)}{d_{AC}^2}, \quad (7)$$

$$\varepsilon_{BC} = \frac{(\Delta Z_C - \Delta Z_B)^2}{2d_{BC}^2} + \frac{(Z_C - Z_B)(\Delta Z_C - \Delta Z_B)}{d_{BC}^2}. \quad (8)$$

Iš (6–8) formulių, žinant trikampio viršūnėse vertikalųjų Žemės plutos judesių reikšmes  $\Delta Z_A$ ,  $\Delta Z_B$ ,  $\Delta Z_C$ , galima apskaičiuoti trikampio kraštinių AB, AC ir BC santykinius pailgėjimus, atsiradusius dėl vertikalųjų Žemės plutos judesių.

### 3. Kampų deformacijos dėl vertikalųjų Žemės plutos judesių

Trikampio kampų pokyčiams, susidariusiems dėl vertikalųjų Žemės plutos judesių įtakos, nustatyti taikysime vektorių skaliarinės sandaugos savybes [8].

Pradinių laiko momentu  $T_0$  kampas  $\varphi_A$  (pav.) yra

$$\varphi_A = \arccos \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}, \quad (9)$$

čia  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  – skaliarinė vektorių sandauga,  $|\overrightarrow{AB}|$ ,  $|\overrightarrow{AC}|$  – vektorių moduliai.

Laiko momentu  $T$  dėl vertikalųjų judesių įtakos pasikeitusi šio kampo reikšmė yra

$$\varphi_{A'} = \arccos \frac{\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'}}{|\overrightarrow{A'B'}| \cdot |\overrightarrow{A'C'}|}. \quad (10)$$

Išreiškus atitinkamus vektorius projekcijomis į koordinatinių ašis pagal tų vektorių pradinių ir galinių taškų koordinatas, (9) ir (10) lygčių skaliarinės sandaugos bus:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (X_B - X_A)(X_C - X_A) + (Y_B - Y_A)(Y_C - Y_A) + (Z_B - Z_A)(Z_C - Z_A), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{AC} &= (X_B - X_A)(X_C - X_A) + \\ & (Y_B - Y_A)(Y_C - Y_A) + [(Z_B - Z_A) + \\ & (\Delta Z_B - \Delta Z_A)] [(Z_C - Z_A) + (\Delta Z_C - \Delta Z_A)]. \end{aligned} \quad (12)$$

Vektorių moduliai  $|\overrightarrow{AB}|$  ir  $|\overrightarrow{A'B'}|$  apskaičiuojami iš (1) ir (2) formulių. Analogiškai apskaičiuojami ir  $|\overrightarrow{AC}|$  bei  $|\overrightarrow{A'C'}|$  vektorių moduliai.

Kampo  $\varphi_A$  pokytis per laikotarpį  $\Delta T = T - T_0$  yra

$$\Delta\varphi_A = \varphi_{A'} - \varphi_A. \quad (13)$$

Tokiu pačiu būdu apskaičiuojama

$$\Delta\varphi_B = \varphi_{B'} - \varphi_B, \quad (14)$$

$$\Delta\varphi_C = \varphi_{C'} - \varphi_C. \quad (15)$$

Trikampio kampų pokyčių skaičiavimo kontrolė:

$$\Delta\varphi_A + \Delta\varphi_B + \Delta\varphi_C = 0. \quad (16)$$

#### 4. Trikampio ploto pokytis

Trikampio ploto pokyčiui per laiko tarpą  $\Delta T$  apskaičiuoti taikysime vektorinės sandaugos savybę [8], kad iš trikampio viršūnės išeinančių dviejų vektorių vektorinės sandaugos gautojo naujo vektoriaus modulis yra lygus dvigubam trikampio plotui.

Tuomet paveiksle parodytų trikampių viršūnės jungiančių vektorių projekcijas į koordinačių ašis apskaičiavus pagal viršūnių koordinates, atitinkamų vektorių sandaugų vektoriai bus:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \left\{ \begin{aligned} & (Y_B - Y_A) (Z_B - Z_A) \\ & (Y_C - Y_A) (Z_C - Z_A) \end{aligned} \right\}, \\ \left\{ \begin{aligned} & (Z_B - Z_A) (X_B - X_A) \\ & (Z_C - Z_A) (X_C - X_A) \end{aligned} \right\}, \left\{ \begin{aligned} & (X_B - Y_A) (Y_B - Y_A) \\ & (X_C - X_A) (Y_C - Y_A) \end{aligned} \right\}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'} &= \left\{ \begin{aligned} & (Y_B - Y_A) [(Z_B - Z_A) + (\Delta Z_B - \Delta Z_A)] \\ & (Y_C - Y_A) [(Z_C - Z_A) + (\Delta Z_C - \Delta Z_A)] \end{aligned} \right\}, \\ \left\{ \begin{aligned} & [(Z_B - Z_A) + (\Delta Z_B - \Delta Z_A)] \\ & [(Z_C - Z_A) + (\Delta Z_C - \Delta Z_A)] \end{aligned} \right\}, \left\{ \begin{aligned} & (X_B - Y_A) (Y_B - Y_A) \\ & (X_C - X_A) (Y_C - Y_A) \end{aligned} \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

čia  $|\cdot|$  – determinantai.

Trikampio ploto santykinis pokytis (dilatacija) per laiko tarpą  $\Delta T$  bus

$$\varepsilon_\Delta = \frac{1}{2P} \left[ \overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'} - \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right], \quad (19)$$

čia  $P$  – trikampio plotas,  $|\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'}|$ ,  $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$  – vektorių (17) ir (18) moduliai.

#### 5. Horizontaliųjų deformacijų rodiklių įvertinimas pagal vertikaliųjų judesių reikšmes

Horizontaliųjų Žemės plutos deformacijų baigtinio elemento plote rodikliai apibūdinami [3, 6] didžiausiuoju ir mažiausiuoju santykiniu pailgėjimais (jie vadinami svarbiausiomis deformacijų reikšmėmis):

$$\left[ \begin{aligned} & D_1 \\ & D_2 \end{aligned} \right] = \frac{1}{2} \left[ (e_{11} + e_{22}) \pm \sqrt{(e_{11} - e_{22})^2 + (e_{12} + e_{21})^2} \right], \quad (20)$$

didžiausiojo pailgėjimo kryptimi abscisų ašies atžvilgiu

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctg \left( -\frac{e_{12} + e_{21}}{e_{11} - e_{22}} \right) + \left[ \begin{aligned} & 90^\circ, \text{ kai } (e_{11} - e_{22}) > 0 \\ & 0^\circ, \text{ kai } (e_{11} - e_{22}) < 0 \end{aligned} \right] \quad (21)$$

bei baigtinio elemento dilatacija

$$\varepsilon_\Delta = e_{11} + e_{22}, \quad (22)$$

čia  $e_{ij}$  – horizontaliųjų deformacijų antrosios eilės tenzoriaus komponentės [3].

Norint apskaičiuoti svarbiausiųjų deformacijų rodiklius (20–21), būtina rasti būdų, kaip įvertinti tenzoriaus komponentes pagal išmatuotų vertikaliųjų Žemės plutos judesių reikšmes.

Deformacijų tenzoriaus komponentėms pagal vertikaliųjų judesių reikšmes apskaičiuoti galima panaudoti apskaičiuotus trikampio kraštinių pailgėjimus, kampų deformacijas bei dilataciją.

Žinoma [3], kad atkarpos, kurios direkcinis kampas  $\alpha$ , santykinis pailgėjimas

$$\varepsilon_\alpha = e_{11} \sin^2 \alpha + e_{22} \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} (e_{12} - e_{21}) \sin 2\alpha. \quad (23)$$

Turint apskaičiuotus trikampio kraštinių santykinį pailgėjimų reikšmes (6–8) ir pagal trikampio viršūnių koordinates apskaičiuotus trikampio kraštinių direkcinis kampus, galima parašyti trijų lygčių sistemą:

$$\left. \begin{aligned} & e_{11} \sin^2 \alpha_{AB} + e_{22} \cos^2 \alpha_{AB} + \\ & \frac{1}{2} (e_{12} + e_{21}) \sin 2\alpha_{AB} = \varepsilon_{AB} \\ & e_{11} \sin^2 \alpha_{AC} + e_{22} \cos^2 \alpha_{AC} + \\ & \frac{1}{2} (e_{12} + e_{21}) \sin 2\alpha_{AC} = \varepsilon_{AC} \\ & e_{11} \sin^2 \alpha_{BC} + e_{22} \cos^2 \alpha_{BC} + \\ & \frac{1}{2} (e_{12} + e_{21}) \sin 2\alpha_{BC} = \varepsilon_{BC} \end{aligned} \right\}. \quad (24)$$

Išsprendus (24) lygčių sistemą, apskaičiuojama  $e_{11}$ ,  $e_{22}$  ir  $(e_{12} + e_{21})$  reikšmės. Turint šias reikšmes, galima apskaičiuoti svarbiausių deformacijų rodiklius (20–22).

Taip pat žinoma [3], kad kampų deformacijos

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2}(e_{11} - e_{22})(\sin 2\alpha_d - \sin 2\alpha_k) + \frac{1}{2}(e_{12} + e_{21})(\cos 2\alpha_d - \cos 2\alpha_k), \quad (25)$$

čia  $\alpha_d$ ,  $\alpha_k$  – kampo dešinėsios ir kairiosios krypties direkciniai kampai. Todėl deformacijų tenzorius komponentėms apskaičiuoti, turint pagal (9–15) formules apskaičiuotus kampų pokyčius, taikant (25) formulę galima sudaryti trijų lygčių sistemą. Tokią lygčių sistemą išsprendę, taip pat gautume  $e_{11}$ ,  $e_{22}$  ir  $(e_{12} + e_{21})$  reikšmes.

(25) formulę galima taikyti ir iš (24) lygčių sistemos apskaičiuotų tenzorius komponentių kontrolei.

## 6. Skaiciavimo pavyzdys

Trikampio ABC viršūnių koordinatės:

$$X_A = 1000,000 \text{ m}, Y_A = 1000,000 \text{ m}, Z_A = 50,000 \text{ m}, \\ X_B = 21000,000 \text{ m}, Y_B = 1000,000 \text{ m}, Z_B = 150,000 \text{ m}, \\ X_C = 1000,000 \text{ m}, Y_C = 21000,000 \text{ m}, Z_C = 200,000 \text{ m}.$$

Taškų aukščiai per laiko tarpą  $\Delta T = 100$  metų pasikeitė:

$$\Delta Z_A = -0,100 \text{ m}, \Delta Z_B = 0,200 \text{ m}, \Delta Z_C = -0,200 \text{ m}.$$

Pagal koordinates apskaičiuoti kraštinių ilgiai:

$$d_{AB} = 20000,000 \text{ m}, d_{AC} = 20000,000 \text{ m}, \\ d_{BC} = 28284,271 \text{ m}.$$

Apskaičiuoti direkciniai kampai:

$$\alpha_{AB} = 0^\circ, \alpha_{AC} = 90^\circ, \alpha_{BC} = 135^\circ.$$

Taikant (6–8) formules apskaičiuoti trikampio kraštinių santykiniai pailgėjimai:  $\varepsilon_{AB} = 7,5 \cdot 10^{-8}$ ,  $\varepsilon_{AC} = -3,75 \cdot 10^{-8}$ ,  $\varepsilon_{BC} = -1,9 \cdot 10^{-8}$ .

Sudaroma (24) lygčių sistema, kurią išsprendus gaunama:  $e_{11} = -3,75 \cdot 10^{-8}$ ,  $e_{22} = 7,5 \cdot 10^{-8}$ ,  $(e_{12} + e_{21}) = 5,65 \cdot 10^{-8}$ .

Taikant šias deformacijų tenzorius reikšmes, iš (20) lygties gaunama, kad kai  $\Delta T = 100$  metų,  $D_1 = 8,2 \cdot 10^{-8}$ ,  $D_2 = -4,4 \cdot 10^{-8}$ . Vienerių metų laiko tarpo  $D_1 = 8,2 \cdot 10^{-10}$ ,  $D_2 = -4,4 \cdot 10^{-10}$ .

Didžiausiojo pailgėjimo  $D_1$  kryptis (21) absčių ašies atžvilgiu  $\varphi = 14^\circ$ .

Dilatacija (22), kai  $\Delta T = 100$  metų,  $\varepsilon_\Delta = 3,75 \cdot 10^{-8}$ , o kai  $\Delta T = 1$  metai,  $\varepsilon_\Delta = 3,75 \cdot 10^{-10}$ .

## 7. Išvados

1. Nustatytas analitinis ryšys tarp vertikaliųjų ir horizontaliųjų Žemės plutos judesių.

2. Parengtas algoritmas horizontaliųjų Žemės plutos judesių svarbiausių deformacijų rodikliams įvertinti pagal vertikaliųjų Žemės plutos judesių matavimo rezultatus.

3. Taikant nustatytą horizontaliųjų ir vertikaliųjų Žemės plutos judesių analitinę sąsają, galima, naudojant vertikaliųjų Žemės plutos judesių matavimo duomenis, kontroliuoti pagal išmatuotuosius horizontaliuosius poslinkius įvertintų svarbiausių Žemės plutos deformacijų rodiklių ir tektoninių įtampų sklaidos dėsningumus.

4. Analitinę sąsają tarp vertikaliųjų ir horizontaliųjų Žemės plutos judesių galima taikyti ne tik tiriant dabartinius Žemės plutos judesius geodeziniais metodais, bet ir analizuojant geologinius duomenis, kai nagrinėjami ankstesnių geologinių periodų tektoniniai judesiai.

## Literatūra

1. Tectonic structure of Lithuania. Compiled and edited by P. Suveizdis. Institute of Geology and Geography. Vilnius, 2003. 160 p. (in Lithuanian).
2. Šliaupa, S. Geodynamic evolution of the Baltic sedimentary basin. Habilitation thesis. Vilnius university, 2003. 206 p. (in Lithuanian).
3. Zakarevičius, A. Investigation of the recent geodynamic processes in the territory of Lithuania. Vilnius: Technika, 2003. 195 p. (in Lithuanian).
4. Esikov, N. Tectonophysical aspects of the analysis of recent movements of a terrestrial surface. Novosibirsk: Nauka, 1979. 182 p. (in Russian).
5. Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L. The finite element method. Vol 1, Fifth edition. Butterworth – Heinemann, 2000. 689 p.
6. Zakarevičius, A.; Stanionis, A. Modelling the horizontal movements and deformations of the earth crust by the finite element method. *Geodesy and Cartography (Geodezija ir kartografija)*, Vol XXX, No 2. Vilnius: Technika, 2004, p. 35–40 (in Lithuanian).
7. Atkočiūnas, J.; Nagevičius, J. Foundations of the theory of elasticity. Vilnius: Technika, 2000. 264 p. (in Lithuanian).
8. Korn, G. A.; Korn, T. M. Mathematical handbook for scientists and engineers. Moscow: Nauka, 1970. 720 p. (in Russian).

**Algimantas ZAKAREVIČIUS.** Doctor Habil, Professor. Dept of Geodesy and Cadastre, Vilnius Gediminas Technical University, Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius-40, Lithuania (Ph +370 5 274 4701), e-mail: Algimantas.Zakarevicius@ap.vtu.lt.

A graduate of Kaunas Polytechnic Institute (now Kaunas University of Technology), geodetic engineer, 1965. Doctor's degree at Vilnius University, 1973. Dr Habil degree at VGTU, 2000. Member of the Geodetic Commission of Estonia, Latvia and Lithuania. Research training at Geodetic Institute of Norwegian Mapping Authority, 1994. Author of over 130 publications and 3 monographs.

Research interests: investigations of the recent geodynamic processes, formation of geodetic networks.