ISSN 1392–1541

Geodezija ir kartografija, 2004, XXX t., Nr. 3
Geodesy and Cartography, 2004, Vol XXX, No 3

UDK 528.14

PSEUDOATSTUMŲ IR NEŠLIO FAZIŲ SĄLYGINIŲ LYGČIŲ SU PAPILDOMAIS PARAMETRAIS TAIKYMAS GPS MATAVIMŲ REZULTATAMS APDOROTI

Jonas Skeivalas

Geodezijos ir kadastro katedra, Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius - 40, Lietuva, el. paštas: Jonas.Skeivalas@ap.vtu.lt

Įteikta 2004 02 20, priimta 2004 06 14

Santrauka. Straipsnyje analizuojami metodai pseudoatstumų ir nešlio fazių matavimų rezultatams apdoroti, naudojant dviejų ir trijų nešlio dažnių GPS imtuvus. Čia taikomos pseudoatstumų ir nešlio fazių sąlyginės lygtys su papildomais parametrais, sudaromos kiekvienoje epochoje pagal kiekvieno „matomo“ palydovo signalų matavimo rezultatus. Siūlomu metodu galima patikimai eliminuoti atsitiktines ir sistemingąsias matavimų klaidas, kurių pagrindinė priežastis – troposferos ir jonosferos įtaka.

Raktažodžiai: GPS, pseudoatstumai, nešlio fazės, jonosferos klaidos, mažiausiųjų kvadratų metodas.

1. Įvadas

GPS matavimo rezultatų tikslumui įtakos turi daugelis veiksnių: dirbtinių Žemės palydovų (DŽP) efemeridžių klaidos, DŽP geometrija, GPS imtuvų ir palydovų laikrodžių klaidos, signalų interferencija ir atspindžiai, troposfera, jonosfera bei kitos šaltinių klaidos. Didžiausios įtakos GPS matavimų tikslumui turi troposfera ir jonosfera. Nemaža autorių įvairiais aspektais analizavo ir analizuoja minėtas matavimų klaidas, atitinkamų dydžių ir parametrų nustatymo tikslumą, kaip sudaromi skaičiavimo algoritmai [1–10]. Dažniausiai jonosferos įtakai matavimo rezultatuose eliminuoti taikomi dviejų nešlio dažnių tiesiniai modeliai, o troposferos įtakai sumažinti – atitinkami netiesiniai modeliai.

Straipsnyje siūlomas metodas pagrįstas sąlyginių lygčių su papildomais parametrais taikymu pseudoatstumų ir nešlio fazių matavimų rezultatams apdoroti. Sąlyginės lygtys sudaromos taikant du arba tris nešlio dažnius ir sprendžiamos mažiausiųjų kvadratų metodu. Taikant papildomus parametrus matavimų klaidų sistemingoji komponentė eliminuojama patikimiau.

2. Metodo esmė

GPS matavimo kanaluose $L1$ ir $L2$ rezultatai, t. y. pseudoatstumų ir nešlio fazių reikšmės, nesutampa pagrindinai dėl jonosferos, troposferos lemiamų ir kitų matavimo klaidų. Kadangi ir dėl jonosferos, ir dėl kitų šaltinių įtakos atsirandančios matavimo klaidos turi atsitiktines ir sistemingąsias komponentes, tai matavimo rezultatams apdoroti taikysime mažiausiųjų kvadratų metodą su papildomais parametrais.

Pseudoatstumų variantas

Išmatuotiems $L1$ ir $L2$ kanaluose taikant du nešlio dažnius pseudoatstumams $R_{i,a}^k(t)$ – vienos epochos ir vieno palydovo – galime parašyti vieną sąlyginę lygtį su vienu papildomu parametru τ_i :

$$\tilde{R}_{1,a}^k(t) - \tilde{R}_{2,a}^k(t) + \tau_i = 0, \qquad (1)$$

čia $\tilde{R}_{i,a}^k(t) = R_{i,a}^k(t) + v_{R_i}$ – i-ojo kanalo išlyginta pseudoatstumo tarp palydovo k ir imtuvo a laiko momentu t reikšmė, $R_{i,a}^k(t)$ – išmatuota i-ojo kanalo pseudoatstumo reikšmė, v_{R_i} – i-ojo kanalo pseudoatstumo paklaidų dėl atsitiktinių matavimo klaidų (jonosfera, troposfera ir kt. veiksniai) pataisa, τ_i – papildomas parametras, įvertinantis sistemingąją komponentę.

Lygybę (1) galime išreikšti sąlyginės pataisų lygties pavidalu:

$$v_{R_1} - v_{R_2} + \tau_i + \omega_i = 0, \qquad (2)$$

čia $\omega_i = R_{1,a}^k(t) - R_{2,a}^k(t)$ – laisvasis narys, arba nesąryšis.

Sąlyginių pataisų lygčių sistema, panaudojus vieno palydovo signalų matavimo rezultatus r epochose:

$$\boldsymbol{A}\mathbf{v}_{\boldsymbol{R}} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\omega} = 0, \qquad (3)$$

čia $\boldsymbol{A}$ – sąlyginių lygčių koeficientų (kai pataisos atsitiktinės) matrica, $\boldsymbol{C}$ – sąlyginių lygčių koeficientų esant sistemingiesiems parametrams matrica, $\mathbf{v}_{\boldsymbol{R}}$ – atsitiktinių pataisų vektorius, $\boldsymbol{\tau}$ – sistemingųjų parametrų vektorius, $\boldsymbol{\omega} = R_1(t) - R_2(t) = \boldsymbol{AR}(t)$ – nesąryšių vektorius, $\boldsymbol{R}(t) = \{R_1^T(t), R_2^T(t)\}^T$. $\boldsymbol{R}_1(t), \boldsymbol{R}_2(t)$ – $L1$ ir $L2$ kanalų išmatuotų pseudoatstumų vektoriai. Tokias lygčių sistemas galima parašyti remiantis kiekvieno „matomo“

palydovo signalų matavimo rezultatais. Pagal kiekvieną palydovą sudarytas sąlyginių pataisų lygčių sistemas galima laikyti nepriklausomomis ir spręsti nepriklausomai vieną nuo kitos.

Kadangi sistemingųjų parametrų skaičius s neturi viršyti matricos A rango r, tai matricos $\boldsymbol{C}$ stulpelių skaičius neturi būti didesnis už r, t. y. $s \le r$, o eilučių skaičius yra lygus matricos A eilučių skaičiui r. Taigi kiekviena sąlyginė lygtis gali turėti ne daugiau kaip vieną sistemingąjį parametrą.

Sąlyginių pataisų lygčių sistemą (3) sprendžiame mažiausiųjų kvadratų metodu, taikydami sąlygą

$$\Phi = \mathbf{v}_R^T \boldsymbol{P}_R \mathbf{v}_R - 2\boldsymbol{k}^T (A\mathbf{v}_R + \boldsymbol{C}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\omega}) = \min, \qquad (4)$$

čia $\boldsymbol{P}_R = (\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2 ..., \boldsymbol{P}_r)_{diag}$ – išmatuotų pseudoatstumų svorių įstrižinė matrica, $\boldsymbol{P}_i = (p_{R_1}, p_{R_2})_{diag}$ – i-osios epochos blokinė svorių matrica, k – Lagranžo koeficientų (koreliatų) vektorius.

Normalinių lygčių sistemos išraiška:

$$\boldsymbol{N}_0 \begin{pmatrix} \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{\tau} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \qquad (5)$$

čia $\boldsymbol{N}_0 = \boldsymbol{A}_0 \boldsymbol{P}_R^{-1} \boldsymbol{A}_0^T = \begin{pmatrix} \boldsymbol{N} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}^T & 0 \end{pmatrix}$, $N = AP_R^{-1}A^T$, $\boldsymbol{A}_0 = (\boldsymbol{AC})$.

Sistemos sprendinys –

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{\tau} \end{pmatrix} = -\boldsymbol{N}_0^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

arba

$$\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{N}^{-1}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\omega}), \qquad (7)$$

$$\boldsymbol{\tau} = -\boldsymbol{N}_c^{-1} \boldsymbol{C}^T \boldsymbol{N}^{-1} \boldsymbol{\omega}, \qquad (8)$$

čia $\boldsymbol{N}_c = \boldsymbol{C}^T \boldsymbol{N}^{-1} \boldsymbol{C}$.

Pataisų vektorius $\mathbf{v}_R$ yra lygus

$$\mathbf{v}_R = \boldsymbol{P}_R^{-1} \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{k}. \qquad (9)$$

Atvirkštinei matricai $\boldsymbol{N}_0^{-1}$ skaičiuoti galima taikyti Frobeniuso išraišką [10]:

$$\boldsymbol{N}_0^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{N} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}^T & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \\ = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{N}^{-1} - \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{N}_C^{-1}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{N}^{-1} & \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{N}_C^{-1} \\ \hline \boldsymbol{N}_C^{-1}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{N}^{-1} & -\boldsymbol{N}_C^{-1} \end{array} \right). \qquad (10)$$

Tuomet iš lygybės (6) nustatome

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{\tau} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \boldsymbol{N}^{-1} - \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{N}_C^{-1}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{N}^{-1} \\ \boldsymbol{N}_C^{-1}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{N}^{-1} \end{pmatrix} \boldsymbol{\omega}. \qquad (11)$$

Kadangi pseudoatstumų matavimo rezultatams, taikant skirtingus nešlio dažnius, didžiausios įtakos turi jonosfera, tai svoriams skaičiuoti taikytos jonosferos įtakos vertinimo formulės [3–5]:

$$\boldsymbol{P}_i = (p_{R1}, p_{R_2})_{diag} = (1{,}00; 0{,}368)_{diag}. \qquad (12)$$

Išlygintų pseudoatstumų vektoriaus $\tilde{\boldsymbol{R}}(t)$ reikšmė skaičiuojama pagal įprastinę formulę:

$$\tilde{\boldsymbol{R}}(t) = \boldsymbol{R}(t) + \mathbf{v}_R = \boldsymbol{R}(t) + \boldsymbol{P}_R^{-1} \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{k}. \qquad (13)$$

Toliau, taikydami koreliatų vektoriaus $\boldsymbol{k}$ išraišką iš formulės (11), rašome:

$$\tilde{\boldsymbol{R}}(t) = \boldsymbol{R}(t) - \boldsymbol{P}_R^{-1} \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{H}\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{P}_R^{-1} \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{H}\boldsymbol{A})\boldsymbol{R}(t), \qquad (14)$$

čia $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{N}^{-1} - \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{N}_C^{-1}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{N}^{-1}$, $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{R}(t)$.

Išlygintų pseudoatstumų vektoriaus $\tilde{\boldsymbol{R}}(t)$ kovariacijų matrica $\boldsymbol{K}_{\tilde{R}}$ nustatoma, taikant atitinkamus matematinės statistikos dėsnius:

$$\boldsymbol{K}_{\tilde{R}} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{P}_R^{-1} \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{H}\boldsymbol{A})\boldsymbol{K}_R (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{P}_R^{-1} \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{H}\boldsymbol{A})^T = \\ = \sigma_0^2 (\boldsymbol{P}_R^{-1} - \boldsymbol{P}_R^{-1} \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{H}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_R^{-1}) = \sigma_0^2 \boldsymbol{Q}_{\tilde{R}}, \qquad (15)$$

čia σ_0 – matavimo rezultato, kurio svoris lygus vienetui, standartinis nuokrypis, $\boldsymbol{K}_R = \sigma_0^2 \boldsymbol{P}_R^{-1}$, $Q_{\tilde{R}}$ – vektoriaus $\tilde{R}(t)$ svorinė matrica.

Sąlyginių lygčių koeficientų stačiakampė matrica $\boldsymbol{A}$ pagal r epochų ir pavienio palydovo signalų matavimo rezultatus, kai naudojami du nešlio kanalai – $L1$ ir $L2$, yra kvazidiagonaliojo pavidalo:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & \boldsymbol{A}_r \end{pmatrix}, \qquad (16)$$

čia matricos $\boldsymbol{A}$ eilučių skaičius lygus r, o stulpelių skaičius – $2r$, $\boldsymbol{A}_i = (1 - 1)$ – i-osios epochos blokinė matrica, i = 1, 2, ..., r.

Sąlyginių lygčių koeficientų esant sistemingiesiems parametrams $\boldsymbol{\tau}$ matrica $\boldsymbol{C}$ sudaryta iš vienetų ir nulių:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ & & & \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

čia stulpelių skaičius $s \le r$.

Išmatuotų pseudoatstumų sąlyginių lygčių koeficientų matrica $\boldsymbol{A}$ dėl r epochų ir pavienio palydovo signalų, kai panaudojami trys nešlio kanalai – $L1$, $L2$ ir $L3$, yra tokio kvazidiagonaliojo pavidalo (16), kai joje eilučių skaičius lygus $2r$, stulpelių – $3r$, o $\boldsymbol{A}_i = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ – i-osios epochos blokinė matrica, $i = 1, 2, ..., r$.

Išmatuotų pseudoatstumų vektoriaus $\boldsymbol{R}(t)$, taikant tris nešlio dažnius, svorių matrica $\boldsymbol{P}'_R$ yra įstrižinė:

$$\boldsymbol{P}_R = (\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, ... \boldsymbol{P}_r)_{diag}, \tag{18}$$

čia eilučių ir stulpelių skaičius vienodas ir lygus $3r$, o $\boldsymbol{P}_i = (1{,}00; 0{,}368; 0{,}310)_{diag}$, i=1, 2, ..., r.

Nešlio fazių variantas

Analogiškos struktūros (3) sąlyginių pataisų lygčių sistemą galima sudaryti nešlio fazių skirtumų $\Phi^k_{i,a}(t)$ matavimų rezultatus redukavus ilgio vienetais (pagal r epochų ir vieno palydovo signalų, kai naudojami $L1$ ir $L2$ kanalai, matavimo rezultatus):

$$\boldsymbol{A}\mathbf{v}_\Phi + \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\omega} = 0, \tag{19}$$

čia $\mathbf{v}_\Phi$ – fazių ciklų pataisų vektorius; $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\Phi}(t)$, $\boldsymbol{\Phi}(t) = \{\boldsymbol{\Phi}_1^T(t), \boldsymbol{\Phi}_2^T(t)\}$.

Fazių skirtumų ciklai, redukuoti ilgio vienetais, užrašomi lygybe

$$\Phi^k_{i,a}(t) = \lambda_i \Phi^k_{i,a}(t). \tag{20}$$

Tais pačiais simboliais pažymėtų pavienių matricų reikšmė pseudoatstumų ir nešlio fazių matavimų variantuose yra skirtinga. Tačiau tai neturi sudaryti keblumų skaitant tekstą, nes kiekvieno varianto prasmė ir rezultatai yra skirtingi.

Sąlyginių nešlio fazių skirtumų pataisų lygčių sistemai (19) spręsti taikomos analogiškos formulės kaip ir pseudoatstumų matavimų rezultatams apdoroti (4–11).

Pataisų vektorius $\mathbf{v}_\Phi$ yra lygus

$$\mathbf{v}_\Phi = \boldsymbol{P}_\Phi^{-1} \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{k}. \tag{21}$$

Koreliatų ir sistemingųjų parametrų vektoriai skaičiuojami iš lygybės

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{\tau} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \boldsymbol{N}^{-1} - \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{N}_C^{-1}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{N}^{-1} \\ \boldsymbol{N}_C^{-1}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{N}^{-1} \end{pmatrix} \boldsymbol{\omega}, \tag{22}$$

čia $\boldsymbol{N}_C = \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{C}$.

Išlygintų redukuotų nešlio fazių vektoriaus $\tilde{\Phi}(t)$ reikšmė gaunama iš lygybės:

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t) + \mathbf{v}_\Phi = \boldsymbol{\Phi}(t) + \boldsymbol{P}_\Phi^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{k}, \tag{23}$$

o kovariacijų matrica $K_{\tilde{\Phi}}$, taikant formulę (15), yra lygi:

$$\boldsymbol{K}_{\tilde{\Phi}} = \sigma_0^2\left(\boldsymbol{P}_\Phi^{-1} - \boldsymbol{P}_\Phi^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_\Phi^{-1}\right) = \sigma_0^2\boldsymbol{Q}_{\tilde{\Phi}}, \tag{24}$$

čia $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{N}^{-1} - \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{N}_c^{-1}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{N}^{-1}$.

Matuojant nešlio fazes matricų A ir C išraiška analogiška kaip ir matuojant pseudoatstumus. Svorių matrica P_Φ dviejų nešlio dažnių taikymo variante yra [3]:

$$\boldsymbol{P}_\Phi = (\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, ..., \boldsymbol{P}_r)_{diag.}, \tag{25}$$

čia $P_i = (1{,}00; 0{,}606)_{diag.}$, i = 1, 2, ..., r.

Svorių matrica P_Φ dėl trijų nešlio dažnių turi tokią išraišką:

$$\boldsymbol{P}_\Phi = (\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, ..., \boldsymbol{P}_r)_{diag},$$

čia $\boldsymbol{P}_i = (1{,}00; 0{,}606; 0{,}559)_{diag}$, i = 1, 2, ..., r.

3. Siūlomo metodo praktinio taikymo rezultatai

Paprastu pavyzdžiu parodysime, kaip kinta pseudoatstumų pataisos, kai skaičiavimų procedūrose taikomi ir netaikomi papildomi parametrai sistemingosioms klaidoms eliminuoti.

Dviejų nešlio kanalų – *L*1, *L*2 variantas

Trijų epochų ir vieno palydovo signalų atveju, kai taikomi sistemingieji parametrai, sąlyginių lygčių koeficientų matrica $\boldsymbol{A}$ ir papildomų parametrų koeficientų matrica $\boldsymbol{C}$ (kai taikytas vienas parametras) yra lygios:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{C}^T = (1\ 1\ 1),$$

o atvirkštinių svorių matrica –

$$\boldsymbol{P}_R^{-1} = (\boldsymbol{P}_1^{-1}, \boldsymbol{P}_2^{-1}, \boldsymbol{P}_3^{-1})_{diag},$$

čia $\boldsymbol{P}_i^{-1} = (1{,}00; 2{,}72)_{diag}$, i = 1, 2, 3.

Normalinių lygčių koeficientų matrica N_0 yra lygi

$$\boldsymbol{N}_0 = \boldsymbol{A}_0 \boldsymbol{P}_R^{-1} \boldsymbol{A}_0^T = (\boldsymbol{AC}) \boldsymbol{P}_R^{-1} (\boldsymbol{AC})^T =$$
$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 3{,}72 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3{,}72 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3{,}72 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

o atvirkštinė matrica

$$\boldsymbol{N}_0^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}18 & -0{,}09 & -0{,}09 & 0{,}33 \\ -0{,}09 & 0{,}18 & -0{,}09 & 0{,}33 \\ -0{,}09 & -0{,}09 & 0{,}18 & 0{,}33 \\ \hline 0{,}33 & 0{,}33 & 0{,}33 & -1{,}23 \end{array}\right).$$

Koreliatų ir sistemingųjų parametrų vektorius

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \tau \end{pmatrix} = -\boldsymbol{N}_0^{-1} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ 0 \end{pmatrix} =$$
$$= -\begin{pmatrix} 0{,}18\omega_1 - 0{,}09\omega_2 - 0{,}09\omega_3 \\ -0{,}09\omega_1 + 0{,}18\omega_2 - 0{,}09\omega_3 \\ -0{,}09\omega_1 - 0{,}09\omega_2 + 0{,}18\omega_3 \\ 0{,}33\omega_1 + 0{,}33\omega_2 + 0{,}33\omega_3 \end{pmatrix}.$$

Išmatuotų pseudoatstumų $R_{i,a}^k(t)$ pataisų vektorius $\mathbf{v}_R$, kai taikomi sistemingieji parametrai, yra lygus

$$\mathbf{v}_R = \boldsymbol{P}_R^{-1} \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 1{,}0 & 0 & 0 \\ -2{,}72 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}0 & 0 \\ 0 & -2{,}72 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}0 \\ 0 & 0 & -2{,}72 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} k_1 \\ -2{,}72k_1 \\ k_2 \\ -2{,}72k_2 \\ k_3 \\ -2{,}72k_3 \end{pmatrix}.$$

Netaikant sistemingųjų parametrų, išmatuotų pseudoatstumų pataisų vektorius $\mathbf{v}'_R$ yra lygus

$$\mathbf{v}'_R = \boldsymbol{P}_R^{-1} \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{k}' = \begin{pmatrix} -0{,}26\omega_1 \\ 0{,}74\omega_1 \\ -0{,}26\omega_2 \\ 0{,}74\omega_2 \\ -0{,}26\omega_3 \\ 0{,}74\omega_3 \end{pmatrix},$$

čia $\boldsymbol{k}' = -\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{\omega} = (-0{,}27\omega_1, -0{,}27\omega_2, -0{,}27\omega_3)^T$.

Palygindami vektorių $\mathbf{v}_R$ ir $\mathbf{v}'_R$, gautų taikant ir netaikant sisteminguosius parametrus, išraiškas matome, kad jie gana akivaizdžiai skiriasi. Taigi atsižvelgiant į tai, kad matavimų sistemingosios klaidos yra neišvengiamos, tikslinga GPS matavimo rezultatų apdorojimo procedūrose taikyti papildomus nežinomuosius sistemingųjų parametrų pavidalu.

Trijų nešlio kanalų – *L*1, *L*2 ir *L*3 variantas

Pateiksime pavyzdį, kaip esti taikant tris nešlio kanalus – $L1$, $L2$ ir $L3$, kai naudojami trijų epochų vieno palydovo signalai. Sistemingųjų parametrų taikymo variante, kai naudotas vienas parametras, galime parašyti šias matricas:

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_1 \quad \boldsymbol{A}_2 \quad \boldsymbol{A}_3)_{diag}, \quad \boldsymbol{A}_i = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{C} = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)^T, \quad \boldsymbol{P}_R^{-1} = (\boldsymbol{P}_1^{-1} \quad \boldsymbol{P}_2^{-1} \quad \boldsymbol{P}_3^{-1})_{diag},$$
$$\boldsymbol{P}_i^{-1} = (1{,}00; \quad 2{,}72; \quad 3{,}23)_{diag.}, \ \mathrm{i} = 1, 2, 3.$$

Normalinių lygčių koeficientų matrica $\boldsymbol{N}_0$ užrašoma taip:

$$\boldsymbol{N}_0 = \boldsymbol{A}_0 \boldsymbol{P}_R^{-1} \boldsymbol{A}_0^T = (\boldsymbol{AC}) \boldsymbol{P}_R^{-1} (\boldsymbol{AC})^T = \begin{pmatrix} \boldsymbol{N} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}^T & 0 \end{pmatrix},$$

čia $\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{N}_1 \ \boldsymbol{N}_2 \ \boldsymbol{N}_3)_{diag}$,

$$\boldsymbol{N}_i = \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{P}_i^{-1} \boldsymbol{A}_i^T = \begin{pmatrix} 3{,}72 & -2{,}72 \\ -2{,}72 & 5{,}95 \end{pmatrix}, \ i = 1, 2, 3.$$

Koreliatų ir sistemingųjų parametrų vektorius

$$\begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{k}} \\ \boldsymbol{\tau} \end{pmatrix} = -\boldsymbol{N}_0^{-1} (\omega_1, \omega'_1, \omega_2, \omega'_2, \omega_3, \omega'_3, 0)^T,$$

čia ω_i, ω'_i – i-osios epochos sąlyginių pataisų lygčių nesąryšiai, taikant atitinkamus $L1$, $L2$ ir $L3$ kanalų derinius.

Toliau gauname:

$$\begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{k}} \\ \boldsymbol{\tau} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0{,}29\omega_1 + 0{,}10\omega'_1 - 0{,}11\omega_2 - 0{,}08\omega'_2 - 0{,}11\omega_3 - 0{,}08\omega'_3 \\ 0{,}10\omega_1 + 0{,}19\omega'_1 - 0{,}08\omega_2 - 0{,}06\omega'_2 - 0{,}08\omega_3 - 0{,}06\omega'_3 \\ \hline -0{,}11\omega_1 - 0{,}08\omega'_1 + 0{,}29\omega_2 + 0{,}10\omega'_2 - 0{,}11\omega_3 - 0{,}08\omega'_3 \\ -0{,}08\omega_1 - 0{,}06\omega'_1 + 0{,}10\omega_2 + 0{,}19\omega'_2 - 0{,}08\omega_3 - 0{,}06\omega'_3 \\ \hline -0{,}11\omega_1 - 0{,}08\omega'_1 - 0{,}11\omega_2 - 0{,}08\omega'_2 + 0{,}29\omega_3 + 0{,}10\omega'_3 \\ -0{,}08\omega_1 - 0{,}06\omega'_1 - 0{,}08\omega_2 - 0{,}06\omega'_2 + 0{,}10\omega_3 + 0{,}19\omega'_3 \\ \hline 0{,}19\omega_1 + 0{,}14\omega'_1 + 0{,}19\omega_2 + 0{,}14\omega'_2 + 0{,}19\omega_3 + 0{,}14\omega'_3 \end{pmatrix}.$$

Išmatuotų pseudoatstumų $R_{i,a}^{k}(t)$ pataisų vektoriaus $\bar{\mathbf{v}}_R$, esant trims nešlio kanalams ir taikant vieną papildomą parametrą, išraiška:

$$\bar{\mathbf{v}}_R = \boldsymbol{P}_R^{-1}\boldsymbol{A}^T\bar{\boldsymbol{k}} = \begin{pmatrix} k_1 \\ -2{,}72k_1 + 2{,}72k_2 \\ -3{,}23k_2 \\ k_3 \\ -2{,}72k_3 + 2{,}72k_4 \\ -3{,}23k_4 \\ k_5 \\ -2{,}72k_5 + 2{,}72k_6 \\ -3{,}23k_6 \end{pmatrix}.$$

Netaikant sistemingųjų parametrų, išmatuotų pseudoatstumų pataisų vektorius $\bar{\mathbf{v}}'_R$, kai naudojami $L1$, $L2$ ir $L3$ nešlio kanalai, yra lygus

$$\bar{\mathbf{v}}'_R = P_R^{-1}A^T\bar{k} = \begin{pmatrix} 0{,}40\omega_1 + 0{,}18\omega'_1 \\ -0{,}60\omega_1 + 0{,}19\omega'_1 \\ 0{,}40\omega_2 + 0{,}18\omega'_2 \\ -0{,}60\omega_2 + 0{,}19\omega'_2 \\ 0{,}40\omega_3 + 0{,}18\omega'_3 \\ -0{,}60\omega_3 + 0{,}19\omega'_3 \end{pmatrix}.$$

4. Metodo tikslumo įvertinimas

Taikydami formulę (15) anksčiau pateiktiems pavyzdžiams apskaičiuojame išlygintų pseudoatstumų vektoriaus $\tilde{\boldsymbol{R}}(t)$ svorines matricas $\boldsymbol{Q}_{\tilde{R}}$ dviejų ir trijų nešlio dažnių variantuose, kai skaičiavimų procedūrose taikytas ir netaikytas sistemingasis parametras. Pateiksime tik svorinių matricų $\boldsymbol{Q}_{\tilde{R}}$ įstrižinius narius, nes jie apibrėžia išlygintų pseudoatstumų atvirkštinius svorius:

$$\boldsymbol{Q}_{\tilde{R},ii} = \left(\boldsymbol{P}_R^{-1} - \boldsymbol{P}_R^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{HAP}_R^{-1}\right)_{ii}.$$

Dviejų nešlio dažnių variante turime:

$\boldsymbol{Q}_{\tilde{R},ii} = \left(0{,}82 \quad 1{,}40 \quad 0{,}82 \quad 1{,}40 \quad 0{,}82 \quad 1{,}40\right)_{ii}$ – taikant sistemingąjį parametrą,

$\boldsymbol{Q}'_{\tilde{R},ii} = \left(0{,}73 \quad 0{,}72 \quad 0{,}73 \quad 0{,}72 \quad 0{,}73 \quad 0{,}72\right)_{ii}$ – netaikant sistemingojo parametro.

Trijų nešlio dažnių atveju gauname:

$\bar{\boldsymbol{Q}}_{\tilde{R},ii} = \left(0{,}71\ 1{,}96\ 1{,}26\ 0{,}71\ 1{,}96\ 1{,}26\ 0{,}71\ 1{,}96\ 1{,}26\right)_{ii}$ – taikant sistemingąjį parametrą,

$\bar{\boldsymbol{Q}}'_{\tilde{R},ii} = \left(0{,}60\ 0{,}58\ 0{,}61\ 0{,}60\ 0{,}58\ 0{,}61\ 0{,}60\ 0{,}58\ 0{,}61\right)_{ii}$ – netaikant sistemingojo parametro.

Kovariacijų matricos $\boldsymbol{K}_{\tilde{R}}$ įvertis gaunamas, kai vietoje σ_0 taikomas jo įvertis m_0:

$$\boldsymbol{K}'_{\tilde{R}} = m_0^2\boldsymbol{Q}_{\tilde{R}}.$$

Standartinio nuokrypio įvertis m_0 skaičiuojamas pagal formules:

$$m_0^2 = \frac{1}{r_s}\left(\boldsymbol{V}_R^T\boldsymbol{P}_R\boldsymbol{V}_R - \boldsymbol{\tau}^T\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{C\tau}\right) - \qquad (26)$$

taikant sisteminguosius parametrus,

$$m_0^2 = \frac{1}{r}V_R^T P_R V_R - \qquad (27)$$

netaikant sistemingųjų parametrų,

čia $r_s = r - s$.

Skaičiavimų rezultatai rodo, kad svorinių matricų įstrižiniai nariai $\boldsymbol{Q}_{\tilde{R},ii}$ yra mažesni tuo atveju, kai netaikomi sistemingieji parametrai. Tačiau m_0 reikšmė šiuo atveju yra didesnė, tai rodo formulės (26), (27). Todėl kovariacijų matricos įverčio $\boldsymbol{K}_{\tilde{R}}$ įstrižiniai nariai bus mažesni taikant sisteminguosius parametrus.

5. Išvados

1. Pateikiamos formulės (9), (11), (21), (22) išmatuotų pseudoatstumų ir nešlio fazių skirtumų pataisoms skaičiuoti, taikant sisteminguosius parametrus. Gautos išlygintų pseudoatstumų ir nešlio fazių skirtumų kovariacijų matricų formulės (15), (24).

2. Praktinių skaičiavimų rezultatai, taikant du ir tris nešlio dažnius, parodė, kad sistemingųjų klaidų įtaka gali būti pakankamai akivaizdi, tačiau ją galima eliminuoti arba sumažinti matavimų apdorojimo procedūrose taikant papildomus sisteminguosius parametrus.

Literatūra

1. Bauer, M. Vermessung und Ortung mit Satelliten. Heidelberg: Wichmann, 1994. 274 S.
2. Hofmann-Wellenhof, B.; Lichtenegger, H. and Collins, J. Global Positioning System. In: Theory and Practice. Wien, New York: Springer-Verlag, 1992. 326 p.
3. Leick, A. GPS Satellite Surveying. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore: John Wiley and Sons. 1995. 352 p.
4. Koch, K. R. Einführung in die Bayes-Statistik. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000. 225 S.
5. Teunissen, P. J. G. An optimality property of the integer least-squares estimator. *Journal of Geodesy,* No 73. Berlin: Springer-Verlag, 1999 b, p 275–284.
6. P. Petroškevičius. Gravitation field effect on geodetic observations. (Gravitacijos lauko poveikis geodeziniams matavimams). Vilnius: Technika, 2004. 292 p (in Lithuanian).
7. Hankemeier, P. Der Satellitenpositionierungsdienst SAPOS in Deutschland. Multifunktionale GNSS-Referenzstationsysteme für Europa. Workshop von 4. 5. März 2002 in der Europäischen Akademie für städtische Umwelt. Berlin, S. 16–23.
8. Skeivalas, J. Accuracy of GPS observations linear models (GPS matavimų tiesinių modelių tikslumas). *Geodesy and Cartography (Geodezija ir kartografija)*, Vol XVIII, No 2, Vilnius: Technika, 2002, p 35–38 (in Lithuanian).
9. Skeivalas, J. Construction of linear models of pseudoranges and carrier phases for eliminating the ionosphere influence (Pseudoatstumų ir nešlio fazių tiesinio modelio jonosferos įtakai eliminuoti sudarymas). *Geodesy and Cartography (Geodezija ir kartografija),* Vol XXIX, No 3, Vilnius: Technika, 2003, p 61–64 (in Lithuanian).
10. Skeivalas, J. Treatment of correlated geodetic measurements results (Koreliuotų geodezinių matavimų rezultatų matematinis apdorojimas). Vilnius: Technika, 1995. 272 p (in Lithuanian).